ΜΕΜ-253: Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων
Ασκήσεις στα πεπερασμένα στοιχεία

Άσκηση 1 *Διατυπώστε την ασθενή μορφή του προβλήματος δυο σημείων,*

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & x \in (0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Επιπλέον, διατυπώστε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για το παραπάνω πρόβλημα.

Λύση Αρχικά, θεωρούμε των χώρο V έτσι ώστε

$$V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v(0) = 0\}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με μια συνάρτηση $v \in V$ και ολοκληρώνουμε κατά μέρη. Τότε,

$$\int_0^1 (uv + u'v') = \int_0^1 fv.$$

Έστω η διγραμμική μορφή $\alpha(\phi,\psi) := \int_0^1 (\phi\psi + \phi'\psi')$, τότε, αναζητάμε συνάρτηση $u \in V$ τέτοια ώστε

$$\alpha(u,v) = (f,v), \quad \forall\, v \in V.$$

Έστω $N \geq 1$ ακέραιο, τότε θεωρούμε μια διαμέριση $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$ του $[0,1]$ με ομοιόμορφο βήμα $h = \frac{b-a}{N+1}$. Ορίζουμε τον χώρο πεπερασμένης διάστασης

$$V_h = \left\{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1,\ i = 1,\ldots,N+1, \ \text{ και } \ v(0) = 0\right\}.$$

Η διάσταση του χώρου V_h είναι $N+1$ και οι συναρτήσεις

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_j}{h}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{h}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \qquad j = 1,\ldots,N, \quad \text{και} \quad \phi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_N}{h}, & x_N \leq x \leq x_{N+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases},$$

αποτελούν βάση του. Θεωρούμε το διακριτό πρόβλημα: Ζητείτε συνάρτηση $u_h \in V_h$ τέτοια ώστε

$$\alpha(u_h,\chi) = (f,\chi), \quad \forall\, \chi \in V_h.$$

Γράφουμε $u_h = \sum_{j=1}^{N+1} c_j\phi_j$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση, θα έχουμε για $\chi = \phi_i$, $i = 1,\ldots,N+1$,

$$\sum_{j=1}^{N+1} c_j \left[(\phi_j',\phi_i') + (\phi_j,\phi_i)\right] = (f,\phi_i), \quad i = 1,\ldots,N+1.$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες με το $(N+1)\times(N+1)$ γραμμικό σύστημα $Ac = b$, όπου $b_i = (f,\phi_i)$ για $i = 1,\ldots,N+1$ και ο πίνακας A αποτελείται από τα στοιχεία

$$A_{ij} = (\phi_j',\phi_i') + (\phi_j,\phi_i) = A_{ji},$$

ο οποίος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα και αντιστρέψιμος. Επομένως το διακριτό πρόβλημα δύο σημείων έχει ακριβώς μια λύση. □

Άσκηση 2 *Διατυπώστε την ασθενή μορφή του προβλήματος δυο σημείων,*

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Επιπλέον, διατυπώστε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για το παραπάνω πρόβλημα.

Λύση Αρχικά, θεωρούμε των χώρο V έτσι ώστε

$$V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v(0) = v(1) = 0\}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με μια συνάρτηση $v \in V$ και ολοκληρώνουμε κατά μέρη. Τότε,

$$\int_0^1 (uv + u'v') = \int_0^1 fv.$$

Έστω η διγραμμική μορφή $\alpha(\phi,\psi) := \int_0^1 (\phi\psi + \phi'\psi')$, τότε, αναζητάμε συνάρτηση $u \in V$ τέτοια ώστε

$$\alpha(u,v) = (f,v), \quad \forall\, v \in V.$$

Έστω $N \geq 1$ ακέραιο, τότε θεωρούμε μια διαμέριση $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$ του $[0,1]$ με ομοιόμορφο βήμα $h = \frac{b-a}{N+1}$. Ορίζουμε τον χώρο πεπερασμένης διάστασης

$$V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1,\ i = 1,\ldots,N+1, \ \text{ και } \ v(0) = v(1) = 0 \right\}.$$

Η διάσταση του χώρου V_h είναι N και οι συναρτήσεις

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_j}{h}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{h}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \qquad j = 1,\ldots,N,$$

αποτελούν βάση του. Θεωρούμε το διακριτό πρόβλημα: Ζητείτε συνάρτηση $u_h \in V_h$ τέτοια ώστε

$$\alpha(u_h,\chi) = (f,\chi), \quad \forall\, \chi \in V_h.$$

Γράφουμε $u_h = \sum_{j=1}^N c_j\phi_j$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση, θα έχουμε για $\chi = \phi_i$, $i = 1,\ldots,N$,

$$\sum_{j=1}^N c_j \left[(\phi_j',\phi_i') + (\phi_j,\phi_i)\right] = (f,\phi_i), \quad i = 1,\ldots,N.$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες με το $\times$ γραμμικό σύστημα $Ac = b$, όπου $b_i = (f,\phi_i)$ για $i = 1,\ldots,N$ και ο πίνακας A αποτελείται από τα στοιχεία

$$A_{ij} = (\phi_j',\phi_i') + (\phi_j,\phi_i) = A_{ji},$$

ο οποίος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα και αντιστρέψιμος. Επομένως το διακριτό πρόβλημα δύο σημείων έχει ακριβώς μια λύση. □

Άσκηση 3 *Προσδιορίστε τους πίνακες στην Άσκηση 1, Άσκηση 2 και Άσκηση ??.*

Λύση

Πίνακες της Άσκησης 1

Έστω $\mathcal{S}_{ij} = (\phi_j',\phi_i')$, και $\mathcal{M}_{ij} = (\phi_j,\phi_i)$ για $i,j = 1,\ldots,N+1$, με

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_j}{h}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{h}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \qquad j = 1,\ldots,N, \quad \text{και} \quad \phi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_N}{h}, & x_N \leq x \leq x_{N+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases}.$$

Παρατηρήστε ότι $\phi_{ij} \neq 0$ μόνο αν $|i-j| < 2$. Συνεπώς, οι πίνακες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{M}$ είναι τριδιαγώνιοι. Αρχικά για τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα ακαμψίας $\mathcal{S}$, έχουμε

$$\mathcal{S}_{ii} = \int_0^1 \phi_i'(x)^2\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i'(x)^2\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i'(x)^2\,dx = \frac{2}{h}, \quad i = 1,\ldots,N,$$

και

$$\mathcal{S}_{N+1,N+1} = \int_0^1 \phi_{N+1}'(x)^2\,dx = \int_{x_N}^{x_{N+1}} \phi_{N+1}'(x)^2\,dx = \frac{1}{h}.$$

Για τα μη-μηδενικά μη-διαγώνια στοιχεία, έχουμε

$$\mathcal{S}_{i,i+1} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x)\,dx = -\frac{1}{h}, \quad i = 1,\ldots,N,$$

και

$$\mathcal{S}_{i,i-1} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_{i-1}'(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i'(x)\phi_{i-1}'(x)\,dx = -\frac{1}{h}, \quad i = 2,\ldots,N+1,$$

Ανάλογα, για τον πίνακα μάζας $\mathcal{M}$, έχουμε

$$\mathcal{M}_{ii} = \int_0^1 \phi_i(x)^2\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)^2\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x)^2\,dx = \frac{2h}{3}, \quad i = 1,\ldots,N,$$

και

$$\mathcal{M}_{N+1,N+1} = \int_0^1 \phi_{N+1}(x)^2\,dx = \int_{x_N}^{x_{N+1}} \phi_{N+1}(x)^2\,dx = \frac{h}{3}.$$

Για τα μη-μηδενικά μη-διαγώνια στοιχεία, έχουμε

$$\mathcal{M}_{i,i+1} = \int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\,dx = \frac{h}{6}, \quad i = 1,\ldots,N,$$

και

$$\mathcal{M}_{i,i-1} = \int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i-1}(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)\phi_{i-1}(x)\,dx = \frac{h}{6}, \quad i = 2,\ldots,N+1,$$

Πίνακες της Άσκησης 2

Έστω $\mathcal{S}_{ij} = (\phi_j', \phi_i')$, και $\mathcal{M}_{ij} = (\phi_j, \phi_i)$ για $i, j = 1, \ldots, N$, με συναρτήσεις

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_j}{h}, & x_{j-1} \le x \le x_j, \\ \frac{x_{j+1} - x}{h}, & x_j \le x \le x_{j+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Παρατηρήστε ότι τώρα οι πίνακες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{M}$ αντιστοιχούν στους $N \times N$ υπο-πίνακες των αντίστοιχων πινάκων της Άσκησης 1.

□

Άσκηση 4 *Εξηγήστε τι είναι λανθασμένο τόσο στην ασθενή όσο και στην κλασσική διατύπωση του παρακάτω προβλήματος,*

$$\begin{cases} -u'' = f, \quad x \in (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Με άλλα λόγια, εξηγήστε γιατί και οι δυο διατυπώσεις για το παραπάνω πρόβλημα δεν είναι καλά ορισμένες.

Λύση Αρχικά θα μελετήσουμε την κλασσική διατύπωση. Έστω u λύση του προβλήματος. Η $u + C$ για κάθε σταθερά C είναι επίσης λύση του. Συνεπώς, το πρόβλημα δεν έχει μοναδική λύση. Η ασθενής μορφή του παραπάνω προβλήματος μπορεί να γραφεί ως: Ζητάμε $u \in V = \mathcal{C}([0,1])$, τέτοια ώστε

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv, \quad \forall\, v \in V.$$

Έστω $v = C$, με C μια σταθερά. Είναι προφανές ότι $v \in \mathcal{C}([0,1])$. Συνεπώς, για αυτή την v, η ασθενής μορφή θα γράφετε,

$$0 = C\int_0^1 f,$$

δηλαδή $(f, 1) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι αν η δοσμένη f δεν έχει αυτή την ιδιότητα, τότε το πρόβλημα δεν έχει ασθενή λύση. Αν η συνάρτηση f έχει την παραπάνω ιδιότητα, τότε η ασθενής λύση ορίζεται μόνο έως μια σταθερά. □

Άσκηση 5 *Έστω* $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ *μια διαμέριση του* $J = [0,1]$ *και* $h = \max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$. *Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο* S, *έτσι ώστε*

$$S = \left\{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1 \quad \textit{και} \quad v(0) = v(1) = 0\right\}$$

Έστω $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ *με* $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, *βάση του* S. *Επίσης, ορίζουμε την παρεμβάλουσα μιας συνάρτησης* $v \in \mathcal{C}([0,1])$ *με* $v_I \,:\, \mathcal{C}([0,1]) \to S$ *με τύπο*

$$v_I := \sum_{i=1}^n v(x_i)\phi_i.$$

Έστω $V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v(0) = v(1) = 0\}$, *δείξτε ότι*

1. $\|(u - u_I)'\|_{L_2(J)} \leq Ch\|u''\|_{L_2(J)}, \quad \forall\, u \in V,$
2. $\|u - u_I\|_{L_2(J)} \leq Ch^2\|u''\|_{L_2(J)}, \quad \forall\, u \in V,$

με σταθερά C *ανεξάρτητη των* h *και* u.

Λύση

Για την (1):

Η ανισότητα που χρειάζεται να αποδείξουμε, μπορεί να γραφεί ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u - u_I)'(x)^2\,dx \leq C\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x_{i-1})^2 u''(x)^2\,dx.$$

Είναι εύκολα αντιληπτό ότι αρκεί να δείξουμε την παρακάτω ανισότητα

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (u - u_I)'(x)^2\,dx \leq C\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x_{i-1})^2 u''(x)^2\,dx.$$

για ένα τυχαίο υπο-διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$. Αρχικά κάνουμε αλλαγή μεταβλητών στα ολοκληρώματα, δηλαδή θέτοντας $x = x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1})$, και θέτοντας $e = u - u_I$, η τελευταία ανισότητα μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής.

$$\int_0^1 \tilde{e}'(t)^2\,dt \leq C\int_0^1 \tilde{e}''(t)^2\,dt,$$

όπου $\tilde{e}(t) = e(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1}))$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε την τελευταία ανισότητα. Έστω $w = \tilde{e}$ για χάριν απλότητας και θα γράφουμε x αντί για $\tilde{x}$. Παρατηρήστε ότι $w(0) = w(1) = 0$. Από Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $w'(\xi) = 0$. Οπότε,

$$w'(y) = \int_\xi^y w''(x)\,dx.$$

Από ανισότητα Schwartz θα έχουμε,

$$\begin{aligned}
|w'(y)| &= \left|\int_\xi^y w''(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_\xi^y 1\cdot w''(x)\,dx\right| \\
&\leq \left|\int_\xi^y 1^2\,dx\right|^{1/2}\left|\int_\xi^y w''(x)^2\,dx\right|^{1/2} \\
&= |y-\xi|^{1/2}\left|\int_\xi^y w''(x)^2\,dx\right|^{1/2} \\
&\leq |y-\xi|^{1/2}\left(\int_0^1 w''(x)^2\,dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα,

$$|w'(y)|^2 \leq |y-\xi|\int_0^1 w''(x)^2\,dx.$$

Ολοκληρώνοντας,

$$\int_0^1 |w'(y)|^2\,dy \le \int_0^1 |y-\xi| \int_0^1 w''(x)^2\,dx\,dy \le \sup_{0<\xi<1} \int_0^1 |y-\xi|\,dy \int_0^1 w''(x)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 w''(x)^2\,dx.$$

Συνολικά,

$$\int_0^1 |w'(x)|^2\,dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 w''(x)^2\,dx. \tag{0.1}$$

Για την (2):

Ανάλογα με το πρώτο ερώτημα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_0^1 \tilde{e}(t)^2\,dt \le C\int_0^1 \tilde{e}''(t)^2\,dt,$$

όπου $\tilde{e}(t) = e(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1}))$. Αφού $w(0) = 0$, τότε

$$w(x) = \int_0^x w'(t)\,dt.$$

Από ανισότητα Schwartz θα έχουμε,

$$\int_0^1 w(x)^2\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^x 1\cdot w'(t)\,dt\right)^2 dx \le \int_0^1 \left(\int_0^x t\right)\cdot\left(\int_0^x w'(t)^2\,dt\right) dx$$
$$\le \int_0^1 x\left(\int_0^x w'(t)^2\,dt\right) dx \le \int_0^1 x\left(\int_0^1 w'(t)^2\,dt\right) dx$$
$$\le \left(\int_0^1 w'(t)^2\,dt\right)\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 w'(t)^2\,t.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 w(x)^2\,dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 w'(x)^2\,dx.$$

Συνδυάζοντας την με την 0.1, έχουμε το τελικό ζητούμενο. □

Άσκηση 6 *Έστω το διάστημα $J = [0,1]$ και $V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) : \|v'\|_{L_2(J)} < \infty \ \text{ και } \ v(0) = 0\}$. Θεωρούμε την διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot,\cdot) : V\times V \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\alpha(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx.$$

Δείξτε ότι

$$\|v\|^2_{L_2(J)} + \|v'\|^2_{L_2(J)} \le C\alpha(v,v), \ \ \forall\, v \in V. \tag{0.2}$$

Βρείτε ακριβώς την σταθερά C.

Λύση Από την Άσκηση 5 έχουμε ότι $\|v\|_{L_2(J)} \le c\|v'\|_{L_2(J)}$ με $c = \frac{1}{2}$. Τότε, προσθέτοντας και στα δυο μέλη τον όρο $\|v'\|_{L_2(J)}$, έχουμε,

$$\|v\|^2_{L_2(J)} + \|v'\|^2_{L_2(J)} \le (c^2+1)\|v'\|^2_{L_2(J)}.$$

Παρατηρήστε ότι $\|v'\|^2_{L_2(J)} = \alpha(v,v)$ και τότε,

$$\|v\|^2_{L_2(J)} + \|v'\|^2_{L_2(J)} \le (c^2+1)\alpha(v,v).$$

Παρατηρήστε ότι $C = \frac{5}{4}$. □

Άσκηση 7 *Έστω $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ μια διαμέριση του $J = [0,1]$ και $h_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1,\ldots,n$. Θεωρήστε τον μέθοδο πεπερασμένων διαφορών που παριστάνεται από*

$$-\frac{2}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{U_{i+1} - U_i}{h_{i+1}} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h_i}\right) = f(x_i). \tag{0.3}$$

Δείξτε ότι η $\tilde{u}_S = \sum_i U_i\phi_i$ ικανοποιεί την παρακάτω ισότητα

$$\alpha(\tilde{u}_S, v) = Q(fv), \quad \forall\, v \in S,$$

με

$$\alpha(v,w) = \int_0^1 v'(x)w'(x)\,dx,$$

και ο S αποτελείται από γραμμικές συναρτήσεις,

$$S = \big\{v \in \mathcal{C}([0,1])\,:\, v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1 \quad \textit{και} \quad v(0) = 0\big\}$$

Επιπλέον, ο Q δηλώνει τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης που βασίζεται στον κανόνα του τραπεζίου,

$$Q(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} w(x_i).$$

Υποθέστε $h_0 = h_{n+1} = 0$.

Λύση Η σχέση (0.3) μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή,

$$KU = F, \quad U = \{U_i\}_{i=1}^{n-1},$$

όπου

$$F_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} f(x_i), \quad i = 1,\ldots,n-1.$$

Η $v \in S$, συνεπώς μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδιασμός της βάσης, δηλαδή $v = \sum_i V_i\phi_i$ με $V_i = v(x_i)$ και $V = \{v(x_i)\}_{i=1}^{n-1}$. Από την γραμμικότητα της διγραμμικής μορφής $\alpha(\cdot,\cdot)$ ως προς τις δυο μεταβλητές, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha(\tilde{u}_S, v) = \alpha\left(\sum_i U_i\phi_i, \sum_j V_j\phi_j\right) &= \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha(\phi_j,\phi_i)U_iV_j = (KU, V)\\ &= (F,V) = \sum_{i=0}^{n} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} f(x_i)v(x_i) = Q(fv).\end{aligned}$$

Οπότε, η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών αυτής της άσκησης είναι ισοδύναμη με την προσέγγιση πολυωνημικής συνάρτησης όπου το δεξί μέρος προσεγγίζεται από τον κανόνα αριθμήτικής ολοκλήρωσης. □

Άσκηση 8 *Έστω Q ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης της προηγούμενης άσκησης. Δείξτε την παρακάτω εκτίμηση σφάλματος.*

$$\left|Q(w) - \int_0^1 w(x)\,dx\right| \le Ch^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |w''(x)|\,dx.$$

Λύση Έστω $w_I \in S$ η κατά τημήματα γραμμική παραμβάλουσα της w. Ο κανόνας του τραπεζίου είναι ακριβής για την w_I και αφού $w_I(x_i) = w(x_i)$, θα έχουμε ότι

$$\int_0^1 w_I(x)\,dx = Q(w_I) = Q(w).$$

Έστω $e = w - w_I$ τότε η ζητούμενη εκτίμηση μπορεί να γραφεί

$$\left|\int_0^1 e(x)\,dx\right| \le Ch^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |e''(x)|\,dx.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε ανάλογες τεχνικές με την Άσκηση 5. Αρκεί να δείξουμε την παρακάτω ανισότητα

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} e(x)\,dx\right| \leq C(x_i - x_{i-1})^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |e''(x)|\,dx,$$

ή ισοδύναμα κάνοντας αλλαγή μεταβλητών, θα έχουμε

$$\left|\int_0^1 \tilde{e}(t)\,dt\right| \leq C \int_0^1 |\tilde{e}''(t)|\,dt,$$

όπου $\tilde{e}(t) = e(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1}))$. Χάριν απλότητας, θα συμβολίζουμε $\zeta = \tilde{e}$ και τότε $\zeta(0) = \zeta(1) = 0$ αφού η w και w_I είναι ίσες στους κόμβους του διαμερισμού. Από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\zeta'(\xi) = 0$. Τότε,

$$\zeta(x) = \int_0^x \zeta'(t)\,dt, \quad \text{και} \quad \zeta'(t) = \int_\xi^t \zeta''(\tau)\,d\tau.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \zeta(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 \int_0^x \zeta'(t)\,dt\,dx\right| &= \left|\int_0^1 \int_0^x \int_\xi^t \zeta''(\tau)\,d\tau\,dt\,dx\right| \\
&\leq \int_0^1 \int_0^x \left|\int_\xi^t \zeta''(\tau)\,d\tau\right|\,dt\,dx \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 \left|\int_\xi^t \zeta''(\tau)\,d\tau\right|\,dt\,dx \\
&= \int_0^1 \left|\int_\xi^t \zeta''(\tau)\,d\tau\right|\,dt \\
&\leq \int_0^\xi \left|\int_t^\xi \zeta''(\tau)\,d\tau\right|\,dt + \int_\xi^1 \left|\int_\xi^t \zeta''(\tau)\,d\tau\right|\,dt \\
&\leq \int_0^\xi \int_t^\xi |\zeta''(\tau)|\,d\tau\,dt + \int_\xi^1 \int_\xi^t |\zeta''(\tau)|\,d\tau\,dt \\
&\leq \int_0^\xi \int_0^\xi |\zeta''(\tau)|\,d\tau\,dt + \int_\xi^1 \int_\xi^1 |\zeta''(\tau)|\,d\tau\,dt \\
&\leq \xi \int_0^\xi |\zeta''(\tau)|\,d\tau + (1-\xi) \int_\xi^1 |\zeta''(\tau)|\,d\tau \\
&\leq \max\{\xi, 1-\xi\} \int_0^1 |\zeta''(x)|\,dx
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 9 *Θεωρήστε το πρόβλημα,*

$$\begin{cases} -u'' = f, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Έστω το συναρτησιακό

$$F(v) := \frac{1}{2}\int_0^1 v'(x)^2\,dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx, \quad \forall\, v \in V,$$

με $V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v(0) = v(1) = 0\}$. *Δείξτε ότι η λύση* $u \in V$ *του ασθενούς προβλήματος ελαχιστοποιεί το παραπάνω συναρτησιακό στον* V.

Λύση Η ασθενής μορφή του προβλήματος είναι η εξής. Ζητείτε $u \in V$ τέτοια ώστε

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx, \quad \forall\, v \in V.$$

Έστω $t \in \mathbb{R}$ και $w = u + tv$, τότε

$$\begin{aligned}
F(w) &= \frac{1}{2}\int_0^1 w'(x)^2\,dx - \int_0^1 f(x)w(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x)+tv'(x))^2\,dx - \int_0^1 f(x)u(x)\,dx - t\int_0^1 f(x)v(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2\,dx - \int_0^1 f(x)u(x)\,dx + t\left(\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx\right) + \frac{t^2}{2}\int_0^1 v'(x)^2\,dx \\
&= F(u) + \frac{t^2}{2}\int_0^1 v'(x)^2\,dx \geq F(u).
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ασθενής μορφή. Συνεπώς, το συναρτησιακό λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του στο u. Στην ουσία, δείξαμε ότι αν u λύση της παραπάνω ασθενούς μορφής, τότε το συναρτησιακό που ορίσαμε λαμβάνει την ελάχιστη τιμή στην u. Μπορούμε να δείξουμε και το αντίστροφο, δηλαδή αν το συναρτησιακό λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του στην u τότε αναγκαστικά u λύση της ασθενούς μορφής. Πράγματι, θεωρούμε την συνάρτηση $g(t) = F(u+tv)$, τότε

$$g'(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2\,dx - \int_0^1 f(x)u(x)\,dx + t\left(\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx\right) + \frac{t^2}{2}\int_0^1 v'(x)^2\,dx.$$

Επίσης,

$$g''(t) = \int_0^1 v'(x)^2\,dx \geq 0,$$

και ως εκ τούτου η g λαμβάνει το ελάχιστο της στο $t=0$ αν $\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$. Δηλαδή η g λαμβάνει το ελάχιστο της στο $t=0$ αν u ασθενής λύση. □

Άσκηση 10 *Η συνάρτηση u ορίζεται στο διάστημα $J=[a,b]$ και είναι τέτοια ώστε $u(a)=0$. Δείξτε την παρακάτω ανισότητα*

$$\|u\|_{L_2(J)} \leq (b-a)\|u'\|_{L_2(J)}, \quad \forall\, v \in \mathcal{C}_0^1(J)$$

Η παραπάνω ανισότητα ονομάζεται ανισότητα του Poincaré.

Λύση Επειδή $u(a)=0$, έχουμε,

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|u(x)|^2 = \left(\int_a^x u'(t)\,dt\right)^2 &\leq \int_a^x 1^2\,dt \int_a^x u'(t)^2\,dt \\
&\leq (b-a)\int_a^b u'(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$|u(x)|^2 \leq (b-a)\|u'\|^2_{L_2(J)}.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη,

$$\|u\|_{L_2(J)} \leq (b-a)\|u'\|_{L_2(J)}, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

□

Άσκηση 11 *Έστω $J=[0,1]$ και u_S η λύση του ασθενούς προβλήματος $\alpha(u_S,v)=(f,v)$, $\forall\, v \in S$, όπου S και $\tilde{u}_S$ όπως στην Άσκηση 7. Δείξτε ότι*

$$|\alpha(u_S - \tilde{u}_S, v)| \leq Ch^2\left(\|f'\|_{L_2(J)} + \|f''\|_{L_2(J)}\right)\left(\|v\|_{L_2(J)} + \|v'\|_{L_2(J)}\right). \tag{0.4}$$

Λύση Χρησιμοποιώντας τις ασκήσεις (5) και (8), έχουμε,

$$
\begin{aligned}
|\alpha(\tilde u_S-u_S,v)| = |Q(fv)-(f,v)| = \left|Q(fv)-\int_0^1 f(x)v(x)\,dx\right| &\le Ch^2\int_0^1 |(f(x)v(x))''|\,dx\\
&= Ch^2\int_0^1 |f''(x)v(x)+2f'(x)v'(x)+f(x)v''(x)|\,dx\\
&= Ch^2\int_0^1 |f''(x)v(x)+2f'(x)v'(x)|\,dx,\ \ \forall\, v\in S.
\end{aligned}
$$

Παρατηρήστε ότι $v''=0$, αφού $v\in S$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Schwartz, θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |f''(x)v(x)+2f'(x)v'(x)|\,dx &\le \int_0^1 |f''(x)v(x)|\,dx + 2\int_0^1 |f'(x)v'(x)|\,dx\\
&\le \|f''\|_{L_2(J)}\|v\|_{L_2(J)} + 2\|f'\|_{L_2(J)}\|v'\|_{L_2(J)}\\
&\le 2\left(\|f''\|_{L_2(J)}\|v\|_{L_2(J)} + \|f'\|_{L_2(J)}\|v'\|_{L_2(J)} + \|f''\|_{L_2(J)}\|v'\|_{L_2(J)} + \|f'\|_{L_2(J)}\|v\|_{L_2(J)}\right)\\
&\le 2\left(\|f'\|_{L_2(J)}+\|f''\|_{L_2(J)}\right)\left(\|v\|_{L_2(J)}+\|v'\|_{L_2(J)}\right).
\end{aligned}
$$

Στις παραπάνω ανισότητες χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $v''=0$ και την μη-αρνητικότητα των όρων $\|f''\|_{L_2(J)}\|v'\|_{L_2(J)}$ και $\|f'\|_{L_2(J)}\|v\|_{L_2(J)}$. □

Άσκηση 12 *Θεωρήστε τις συναρτήσεις όπως στην Άσκηση 11. Δείξτε ότι*

$$\|u_S'-\tilde u_S'\|_E \le Ch^2\left(\|f'\|_{L_2(J)}+\|f''\|_{L_2(J)}\right)$$

Η νόρμα $\|\cdot\|_E$ ονομάζεται νόρμα ενέργειας και ορίζεται ως

$$\|v\|_E=\sqrt{\alpha(v,v)},\ \ \forall\, v\in V.$$

Λύση Παίρνοντας $v=u_S-\tilde u_S$ στην (0.4), λαμβάνουμε

$$\|u_S-\tilde u_S\|_E^2 = \alpha(u_S-\tilde u_S,u_S-\tilde u_S) \le Ch^2\left(\|f'\|_{L_2(J)}+\|f''\|_{L_2(J)}\right)\left(\|u_S-\tilde u_S\|_{L_2(J)}+\|\tilde u_S'-\tilde u_S'\|_{L_2(J)}\right).$$

Χρησιμοποιώντας την (0.2) θα έχουμε

$$\|u_S-\tilde u_S\|_{L_2(J)} \le C\|u_S-\tilde u_S\|_E,\ \ \text{και}\ \ \|u_S'-\tilde u_S'\|_{L_2(J)} \le C\|u_S-\tilde u_S\|_E.$$

□

Άσκηση 13 *Έστω $V=\{v\in\mathcal{C}([0,1])\ :\ v(0)=0\}$ και $\alpha(\cdot,\cdot)\ :\ V\times V\to\mathbb{R}$ η διγραμμική μορφή η οποία ορίζεται ως*

$$\alpha(v,w)=\int_0^1 v'(x)w'(x)\,dx.$$

Δείξτε ότι

$$\|v\|_{max}^2\le\alpha(v,v),\quad \forall\, v\in V\cap\mathcal{C}^1(0,1).$$

Εδώ $\|v\|_{max}=\max_{0\le x\le 1}|v(x)|$.

Λύση Η απόδειξη είναι ανάλογη της Άσκησης 10. Επειδή $v(0)=0$, έχουμε,

$$v(x)=\int_0^x v'(t)\,dt,\ \ \forall\, x\in[0,1].$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
|v(x)|^2=\left(\int_0^x v'(t)\,dt\right)^2 &\le \int_0^x 1^2\,dt\int_0^x v'(t)^2\,dt\\
&\le x\int_0^1 v'(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς,

$$|v(x)|^2 \le \|v'\|^2_{L_2(0,1)} = \alpha(v,v), \ \ \forall\, x \in [0,1].$$

Λαμβάνοντας το max στο αριστερό μέλος, έχουμε

$$\|v\|_{max} \le \alpha(v,v), \quad \forall\, v \in V \cap \mathcal{C}^1(0,1).$$

$\square$

Άσκηση 14 *Έστω το πρόβλημα*

$$\begin{cases} -\epsilon u'' + xu' + u = f, \ \ x \in J = [0,1] \\ \quad u(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

με σταθερά $\epsilon > 0$. Δείξτε ότι η λύση του παραπάνω προβλήματος ικανοποιεί την εκ των προτέρων εκτίμηση

$$\|\epsilon u''\|_{L_2(J)} \le \|f\|_{L_2(J)}.$$

Λύση Λαμβάνουμε το εσωτερικό γινόμενο με $\epsilon u''$. Τότε,

$$-\epsilon^2\|u''\|^2_{L_2(J)} + \epsilon(xu', u'') + \epsilon(u, u'') = \epsilon(f, u'').$$

Από ολοκλήρωση κατά παράγοντες, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \epsilon(xu', u'') = \epsilon \int_0^1 xu'(x)u''(x)\,dx &= \epsilon x u'(x)^2|_0^1 - \epsilon \int_0^1 u'(x)\left(xu''(x) + u'(x)\right)\,dx \\ &= -\epsilon\|u'\|^2_{L_2(J)} - \epsilon \int_0^1 xu'(x)u''(x)\,dx. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\epsilon(xu', u'') = -\frac{1}{2}\epsilon\|u'\|^2_{L_2(J)}.$$

Ανάλογα,

$$\epsilon(u, u'') = \epsilon \int_0^1 u(x)u''(x)\,dx = \epsilon u(x)u'(x)|_0^1 - \epsilon\|u'\|^2_{L_2(J)} = -\epsilon\|u'\|^2_{L_2(J)}.$$

Συνολικά,

$$-\epsilon^2\|u''\|^2_{L_2(J)} - \frac{3}{2}\epsilon\|u'\|^2_{L_2(J)} = \epsilon(f, u''),$$

ή ισοδύναμα

$$\epsilon^2\|u''\|^2_{L_2(J)} + \frac{3}{2}\|u'\|^2_{L_2(J)} = -\epsilon(f, u'') \le \epsilon|(f, u'')| \le \epsilon\|f\|_{L_2(J)}\|u''\|_{L_2(J)}.$$

Χρησιμοποιώντας την μη-αρνητικότητα του $\|u'\|^2_{L_2(J)}$, λαμβάνουμε

$$\epsilon^2\|u''\|^2_{L_2(J)} \le \epsilon\|f\|_{L_2(J)}\|u''\|_{L_2(J)},$$

ή ισοδύναμα

$$\|\epsilon u''\|_{L_2(J)} \le \|f\|_{L_2(J)}.$$

$\square$

Άσκηση 15 *Θεωρήστε το πρόβλημα δυο σημείων της μορφής,*

$$\begin{cases} \quad -u'' + qu = f, \ \ x \in J = [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

με q, $f \in \mathcal{C}[0,1]$ και $q(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι αν $u \in \mathcal{C}_0^2[0,1]$, τότε υπάρχει μια σταθερά C η οποία εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος, έτσι ώστε

$$\|u\|_{L_2(J)} + \|u'\|_{L_2(J)} + \|u''\|_{L_2(J)} \le C\|f\|_{L_2(J)}.$$

Λύση Η ασθενής μορφή του προβλήματος είναι η ακόλουθη. Ζητάμε συνάρτηση $u \in V$ τέτοια ώστε

$$(u', v') + (qu, v) = (f, v), \quad \forall\, v \in V,$$

με

$$V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v(0) = v(1) = 0\}.$$

Λαμβάνοντας $v = u$ στην ασθενή μορφή, θα έχουμε

$$\|u'\|^2_{L_2(J)} + (qu, u) = (f, u) \leq \|f\|_{L_2(J)} \|u\|_{L_2(J)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$(qu, u) = \int_J q(x) u(x)^2 \, dx \geq 0,$$

και ως εκ τούτου $\|u'\|^2_{L_2(J)} + (qu, u) \geq \|u'\|^2_{L_2(J)}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \|u'\|^2_{L_2(J)} &\leq \|f\|_{L_2(J)} \|u\|_{L_2(J)} \\ &\leq \|f\|_{L_2(J)} \|u'\|_{L_2(J)}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα του Poincaré (10). Συνολικά,

$$\|u'\|_{L_2(J)} \leq \|f\|_{L_2(J)}. \tag{0.5}$$

Αν εφαρμόσουμε άλλη μια φορά την ανισότητα Poincaré, λαμβάνουμε

$$\|u\|_{L_2(J)} \leq \|u'\|_{L_2(J)} \leq \|f\|_{L_2(J)}, \tag{0.6}$$

όπου η τελευταία εκτίμηση προήλθε από την (0.5). Παρατηρούμε, από την εξίσωση του προβλήματος ότι

$$u'' = qu - f,$$

και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} \|u''\|_{L_2(J)} = \|qu - f\|_{L_2(J)} \leq \|qu\|_{L_2(J)} + \|f\|_{L_2(J)} &\leq \max_{0 \leq x \leq 1} |q(x)| \|u\|_{L_2(J)} + \|f\|_{L_2(J)} \\ &\leq \max_{0 \leq x \leq 1} |q(x)| \|f\|_{L_2(J)} + \|f\|_{L_2(J)} \\ &= (\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x)| + 1) \|f\|_{L_2(J)} \end{aligned}$$

Η τελευταία εκτίμηση μαζί με τις (0.5) και (0.6), αποδεικνύουν το ζητούμενο. □